

Аксиоматическая схема пакетной геометрии

в духе Гильберта и Клейна

И.Б. Курпишев me@kurpishev.ru

2026

Аннотация

В работе вводится строгая аксиоматическая схема пакетной геометрии. Её базовый объект — *пакетная точка*, то есть инцидентная пара (e, s) , где e есть событие, а s есть состояние. Прямые возникают как слои при фиксированном состоянии. На этом языке формализуются инцидентность, порядок, конгруэнтность и группа автоморфизмов. Доказывается, что всякая классическая линейная геометрия допускает канонический *packet lift*. В приложении показано, как не-гильбертова ослабленная форма отношения “между” естественно возникает в циклической пакетной модели.

Содержание

1 Введение	2
2 Пакетные инцидентные структуры	2
2.1 Базовые аксиомы инцидентности	3
3 Линейные пакетные геометрии	3
4 Групповой язык Клейна	5
5 Packet lift классических геометрий	6
6 Соотношение трёх аксиоматических систем	7
6.1 Гильберт как частный случай	7
6.2 Клейн как частный случай	7
6.3 НАПГ как обобщение	8
A Циклическая пакетная линия как не-гильбертово расширение	8

1. Введение

Существуют два классических подхода к основаниям геометрии.

Синтетический подход Гильберта. Здесь геометрия задаётся через аксиомы инцидентности, порядка, конгруэнтности, параллельности и непрерывности.

Групповой подход Клейна. Здесь геометрия описывается через пространство объектов и группу преобразований, сохраняющих выделенные геометрические свойства.

Цель настоящего текста — построить общую аксиоматическую схему, в которой базовый объект есть не “голая точка”, а *пакетная точка*

$$a = (e, s),$$

то есть событие e , рассматриваемое в состоянии s . При фиксированном состоянии возникает соответствующая *пакетная прямая*. Такая схема годится как для классических линейных моделей, так и для более общих не-гильбертовых расширений.

Настоящий текст является *самостоятельной аксиоматической заметкой*. Он не использует и не модифицирует основной теоремный каркас текущего проекта НАПГ 2.0.

2. Пакетные инцидентные структуры

Определение 2.1 (Пакетный инцидентный датум). Пакетным инцидентным датумом называется тройка

$$(\mathcal{E}, \mathcal{S}, \mathcal{P}),$$

где

- \mathcal{E} — множество событий;
- \mathcal{S} — множество состояний;
- $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{E} \times \mathcal{S}$ — множество пакетных точек.

Элемент

$$a = (e, s) \in \mathcal{P}$$

называется *пакетной точкой*.

Определение 2.2 (Пакетная прямая). Для каждого состояния $s \in \mathcal{S}$ определим соответствующую *пакетную прямую*

$$L_s := \{(e, s) \in \mathcal{P}\}.$$

Множество всех пакетных прямых обозначается через

$$\mathcal{L} := \{L_s : s \in \mathcal{S}\}.$$

Определение 2.3 (Событийное волокно). Для состояния $s \in \mathcal{S}$ положим

$$E_s := \{e \in \mathcal{E} : (e, s) \in \mathcal{P}\}.$$

Тогда естественное отображение

$$E_s \longrightarrow L_s, \quad e \longmapsto (e, s),$$

является биекцией.

Замечание 2.4. Тем самым пакетная геометрия — это не просто множество точек, а семейство линейных слоёв L_s , параметризованное состояниями s .

2.1. Базовые аксиомы инцидентности

Аксиома 2.5 (P1: непустые линии). Для каждого $s \in \mathcal{S}$ множество E_s содержит не менее двух элементов. Эквивалентно, каждая пакетная прямая L_s содержит не менее двух пакетных точек.

Аксиома 2.6 (P2: различимость состояний). Если $s, t \in \mathcal{S}$ и $s \neq t$, то $L_s \neq L_t$.

Аксиома 2.7 (P3: единственность линии через пакетную точку). Каждая пакетная точка $a = (e, s) \in \mathcal{P}$ лежит ровно на одной пакетной прямой, а именно на L_s .

Замечание 2.8. Аксиома 2.7 не является аналогом классической аксиомы “через две точки проходит прямая”. В пакетной геометрии линия определяется не парой точек, а состоянием.

3. Линейные пакетные геометрии

Чтобы ввести отношение “между” и конгруэнтность, необходимо на каждой линии иметь одномерную геометрию.

Определение 3.1 (Линейная пакетная геометрия). Линейной пакетной геометрией называется пакетный инцидентный датум $(\mathcal{E}, \mathcal{S}, \mathcal{P})$, удовлетворяющий аксиомам 2.5–2.7, и дополнительно снабжённый, для каждого $s \in \mathcal{S}$,

1. линейным порядком $<_s$ на множестве E_s ;
2. функцией расстояния

$$d_s : E_s \times E_s \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$

удовлетворяющей условиям (D1)–(D4) ниже.

Аксиома 3.2 (D1: невырожденность). Для каждого $s \in \mathcal{S}$ и любых $x, y \in E_s$

$$d_s(x, y) = 0 \iff x = y.$$

Аксиома 3.3 (D2: симметрия). Для каждого $s \in \mathcal{S}$ и любых $x, y \in E_s$

$$d_s(x, y) = d_s(y, x).$$

Аксиома 3.4 (D3: аддитивность на упорядоченных тройках). Для каждого $s \in \mathcal{S}$ и любых $x, y, z \in E_s$, если $x <_s y <_s z$, то

$$d_s(x, z) = d_s(x, y) + d_s(y, z).$$

Аксиома 3.5 (D4: модель прямой). Для каждого $s \in \mathcal{S}$ упорядоченное метрическое пространство $(E_s, <_s, d_s)$ изоморфно $(\mathbb{R}, <, |\cdot|)$.

Определение 3.6 (Отношение между). Пусть $A = (x, s)$, $B = (y, s)$, $C = (z, s)$ лежат на одной пакетной прямой L_s . Определим

$$\text{Bet}(A, B, C)$$

условием

$$x <_s y <_s z \quad \text{или} \quad z <_s y <_s x.$$

Если точки не лежат на одной пакетной прямой, то $\text{Bet}(A, B, C)$ считается ложным.

Определение 3.7 (Конгруэнтность отрезков). Пусть $A = (x, s)$, $B = (y, s)$, $C = (u, t)$, $D = (v, t)$. Говорим, что отрезки AB и CD *конгруэнтны*, и пишем

$$AB \cong CD,$$

если

$$d_s(x, y) = d_t(u, v).$$

Предложение 3.8. В линейной пакетной геометрии выполняются следующие свойства:

1. если $\text{Bet}(A, B, C)$, то A, B, C попарно различны и лежат на одной линии;
2. $\text{Bet}(A, B, C) \iff \text{Bet}(C, B, A)$;
3. для любых двух различных точек A, C на одной линии существует точка B на той же линии такая, что $\text{Bet}(A, B, C)$.

Доказательство. Все утверждения немедленно следуют из определения Bet и из того, что каждое $(E_s, <_s)$ изоморфно $(\mathbb{R}, <)$. \square

Предложение 3.9. Конгруэнтность отрезков является отношением эквивалентности. Кроме того, если

$$\text{Bet}(A, B, C), \quad \text{Bet}(A', B', C'),$$

и

$$AB \cong A'B', \quad BC \cong B'C',$$

то

$$AC \cong A'C'.$$

Доказательство. Эквивалентность следует из аксиом 3.2–3.3. Аддитивность конгруэнтности при склейке отрезков следует из аксиомы 3.4. \square

Определение 3.10 (Луч). Пусть $A = (x, s) \in L_s$. Определим два луча с началом в A :

$$R_s^+(A) := \{(y, s) \in L_s : x \leq_s y\}, \quad R_s^-(A) := \{(y, s) \in L_s : y \leq_s x\}.$$

Предложение 3.11 (Откладывание отрезка на луче). Пусть $A = (x, s) \in L_s$, R есть один из лучей $R_s^\pm(A)$, и пусть дан отрезок CD , лежащий на некоторой линии L_t . Тогда на луче R существует единственная точка B , такая что

$$AB \cong CD.$$

Доказательство. По аксиоме 3.5 каждое $(E_s, <_s, d_s)$ изоморфно вещественной прямой. Поэтому на любом луче из точки A существует единственная точка, удалённая от A на расстояние $d_t(C, D)$. \square

4. Групповой язык Клейна

Определение 4.1 (Автоморфизм пакетной геометрии). Автоморфизмом пакетной геометрии называется пара биекций

$$f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, \quad g : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S},$$

такая, что:

1. для всех $e \in \mathcal{E}$ и $s \in \mathcal{S}$

$$(e, s) \in \mathcal{P} \iff (f(e), g(s)) \in \mathcal{P};$$

2. для каждого $s \in \mathcal{S}$ отображение

$$f : E_s \rightarrow E_{g(s)}$$

является изоморфизмом линейно упорядоченных метрических пространств, то есть сохраняет $<_s$ и d_s .

Группа всех таких автоморфизмов обозначается $\text{Aut}(\mathcal{P})$.

Определение 4.2 (Однородная пакетная геометрия). Линейная пакетная геометрия называется *однородной*, если:

1. группа $\text{Aut}(\mathcal{P})$ транзитивно действует на множестве состояний \mathcal{S} ;
2. для каждого $s \in \mathcal{S}$ стабилизатор

$$\text{Stab}(s) := \{\Phi \in \text{Aut}(\mathcal{P}) : \Phi(L_s) = L_s\}$$

транзитивно действует на L_s .

Замечание 4.3. Определение 4.2 есть естественный аналог эрлангенского принципа Клейна в пакетном контексте: геометрия задаётся через пакетные объекты и группу их симметрий.

5. Packet lift классических геометрий

Определение 5.1 (Классическая линейная геометрия). Под классической линейной геометрией будем понимать тройку

$$(X, \mathcal{M}, \in),$$

где X — множество точек, \mathcal{M} — множество линий, а \in есть отношение инцидентности, причём каждая линия $m \in \mathcal{M}$ снабжена структурой линейно упорядоченного метрического пространства, изоморфного $(\mathbb{R}, <, |\cdot|)$.

Теорема 5.2 (Канонический packet lift). Пусть (X, \mathcal{M}, \in) — классическая линейная геометрия. Положим

$$\mathcal{E} := X, \quad \mathcal{S} := \mathcal{M}, \quad \mathcal{P} := \{(x, m) \in X \times \mathcal{M} : x \in m\}.$$

Тогда:

1. $(\mathcal{E}, \mathcal{S}, \mathcal{P})$ является линейной пакетной геометрией;
2. для каждого $m \in \mathcal{M}$ пакетная прямая L_m канонически изоморфна исходной линии m ;
3. проекция

$$\pi : \mathcal{P} \rightarrow X, \quad \pi(x, m) = x,$$

сохраняет инцидентность в естественном смысле.

Доказательство. По определению

$$L_m = \{(x, m) : x \in m\},$$

поэтому L_m биективно соответствует исходной линии m . Линейный порядок и расстояние на m переносятся на L_m через эту биекцию. Аксиомы 2.5–2.7 и 3.2–3.5 проверяются непосредственно. Последнее утверждение очевидно из определения π . \square

Следствие 5.3. Евклидова прямая и гиперболическая геодезическая прямая допускают канонический packet lift. Более общо, всякая геометрия, чьи линии несут вещественно-линейную структуру, поднимается до линейной пакетной геометрии.

Замечание 5.4. Проективная геометрия также допускает *инцидентный* packet lift, но не всякая проективная линия несёт глобальный линейный порядок типа \mathbb{R} . Поэтому в проективном случае естественно говорить прежде всего о пакетной *инцидентной* геометрии, а не о линейной пакетной геометрии в смысле Definition 3.1.

Пример 5.5 (Евклидова плоскость). Пусть $X = \mathbb{R}^2$, а \mathcal{M} есть множество всех аффинных прямых в \mathbb{R}^2 . На каждой прямой берётся стандартный аффинный параметр и евклидово расстояние. Тогда Теорема 5.2 даёт линейную пакетную геометрию.

Пример 5.6 (Гиперболическая плоскость). Пусть $X = \mathbb{H}^2$, а \mathcal{M} есть множество всех геодезических. На каждой геодезической берутся её естественный порядок и гиперболическое расстояние. Получаем линейную пакетную геометрию.

Пример 5.7 (Проективная плоскость). Пусть $X = \mathbb{RP}^2$, а \mathcal{M} есть множество всех проективных прямых. Тогда пакетный lift существует на инцидентном уровне:

$$\mathcal{P} = \{(x, m) : x \in m\}.$$

Однако глобальный линейный порядок на проективной прямой отсутствует, поэтому это пример пакетной инцидентной геометрии, не обязанный быть линейным.

6. Соотношение трёх аксиоматических систем

В этом разделе мы фиксируем, как классические системы Гильберта и Клейна вписываются в пакетную схему.

6.1. Гильберт как частный случай

Пусть дана линейная пакетная геометрия $(\mathcal{E}, \mathcal{S}, \mathcal{P})$ со следующими дополнительными свойствами:

1. множество состояний \mathcal{S} состоит ровно из одного элемента;
2. событийное волокно E_s линейно упорядочено и дедекиндово полно.

Тогда пакетная прямая L_s отождествляется с классической прямой, а все аксиомы Гильберта (инцидентность, порядок, конгруэнтность, непрерывность) выполняются в стандартной форме. Аксиома параллельности при этом не фиксируется — она становится выбором группы автоморфизмов.

6.2. Клейн как частный случай

Пусть дана линейная пакетная геометрия, в которой группа автоморфизмов $\text{Aut}(\mathcal{P})$ действует транзитивно на \mathcal{P} . Тогда пара $(\mathcal{P}, \text{Aut}(\mathcal{P}))$ задаёт геометрию в смысле Эрлангенской программы. Обратно, любая геометрия Клейна (X, G) с транзитивным действием G на X допускает канонический packet lift:

$$\mathcal{E} = X, \quad \mathcal{S} = \{s\}, \quad \mathcal{P} = X \times \{s\},$$

с группой автоморфизмов, изоморфной G .

6.3. НАПГ как обобщение

Пакетная геометрия обобщает оба подхода:

- она допускает **несколько состояний** (стратификация),
- допускает **нетранзитивное или циклическое отношение «между»** (пример — приложение А),
- группа автоморфизмов может действовать нетранзитивно,
- конгруэнтность определена **внутри каждого слоя** независимо.

Таким образом, предложенная аксиоматическая схема является **естественным объединением и расширением** классических систем.

А. Циклическая пакетная линия: не-гильбертово расширение

В этом приложении фиксируется пример, показывающий, что ослабленная версия отношения “между” естественно возникает в не-линейных пакетных моделях.

Определение А.1 (Циклическая пакетная линия). Положим

$$\mathcal{E} = S^1, \quad \mathcal{S} = \{s\}, \quad \mathcal{P} = S^1 \times \{s\}.$$

Тогда имеется единственная пакетная прямая L_s .

Определение А.2 (Круговое отношение “между”). Для трёх различных точек $A, B, C \in L_s$ положим

$$\text{Bet}_\circ(A, B, C) = 1,$$

если событие B лежит на одной из кратчайших дуг окружности, соединяющих события A и C .

Предложение А.3. *В циклической пакетной линии отношение Bet_\circ не обязано удовлетворять классическому гильбертову требованию единственности средней точки.*

Доказательство. Рассмотрим на единичной окружности точки

$$A = e^{i0}, \quad B = e^{i80^\circ}, \quad C = e^{i100^\circ}.$$

Тогда B лежит на кратчайшей дуге от A к C , и потому

$$\text{Bet}_\circ(A, B, C) = 1.$$

По той же причине

$$\text{Bet}_\circ(C, B, A) = 1.$$

Следовательно, классическая жёсткая асимметрия линейного отношения “между” здесь нарушается. \square

Замечание А.4. Этот пример не противоречит строгой части статьи. Он лишь показывает, что за пределами линейной пакетной геометрии существуют естественные не-гильбертовы режимы.

Итоги строгой части

В строгой части мы получили следующую схему.

1. Базовый объект — пакетная точка (e, s) .
2. Прямая — слой L_s при фиксированном состоянии.
3. Линейная структура возникает после задания на каждом E_s копии вещественной прямой.
4. Конгруэнтность задаётся равенством расстояний на слоях.
5. Групповой подход Клейна реализуется через $\text{Aut}(\mathcal{P})$.
6. Классические линейные геометрии поднимаются в пакетную схему через канонический packet lift.
7. Гильберт и Клейн суть частные случаи пакетной геометрии, которая является их естественным обобщением.

Тем самым пакетная геометрия оказывается не заменой классической геометрии, а её обобщающим слоистым языком.

Список литературы

- [1] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, 1899.
- [2] F. Klein, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, 1872.
- [3] H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, Wiley, 2nd edition, 1969.
- [4] E. Artin, *Geometric Algebra*, Interscience, 1957.